Uzdevumu lapa 7.klasēm

RV1.Ģ komandu olimpiāde matemātikā pamatskolai

Svaigā Maize 2004

1. Dotas 20 pēc izskata vienādas monētas. Tieši viena no tām ir viltota, un tai ir atšķirīgs svars nekā pārējām. Kā, izmantojot sviru svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām var noteikt, vai viltotā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām?

2. Orbitreku kalendārā ir 11 dienas. Katram no desmit ciema orbitrekiem piešķirts cits numurs no 1 līdz 10. Orbitreki katru dienu spēlē šahu, turklāt attiecīgajā dienā drīkst spēlēt tikai tie orbitreki, kuru numuru summa sakrīt ar dienas kārtas numuru nedēļā. Kura dienā iespējams izspēlēt visvairāk partiju?

3. 30 skolēni rakstīja diktātu. Aleksim diktātā bija 14 kļūdas. Citiem skolēniem bija mazāk. Pierādīt, ka klasē var atrast trīs skolēnus, kuri pieļāva vienādu kļūdu skaitu.

4. Pa apli uzrakstīti 2004 skaitļi. Katru triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa ir pozitīva. Kāds lielākais skaits negatīvu skaitļu var būt starp uzrakstītajiem?

5. Pierādīt, ka $(n^2 - 8n + 15)(n^2 - 2n - 8)$ dalās ar 4.

6. Noteikt visus četrciparu skaitļus, kuriem ciparu reizinājums ir 70 un kuri dalās ar 5.

7. Vai pa rūtiņu tīklu var uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kuras posmu garumi ir pēc kārtas 1,2,...,n rūtiņas, ja

a) $n = 8$

b) $n = 9$

c) $n =10$

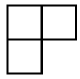
8. Vai kvadrātā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 36 katru vienu reizi tā, lai katrā kolonnā un rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar

a) 9 ;

b) 27 ?

9. Dots, ka skaitļi 3a+4b un 2a+3b dalās ar 5. Pierādīt, ka gan a, gan b dalās ar 5.

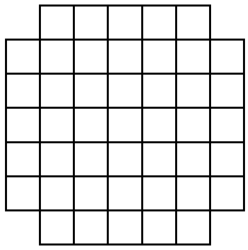
10. Ezītim katru dienu izaug vēl divtik jaunu adatu, cik viņam jau ir, un viena adata izkrīt. Kad ezītis piedzima, viņam bija 1 adata. Vai var gadīties, ka kādu dienu viņa adatu skaits dalīsies ar 9 ?

11. Dots kvadrāts, kas sastāv no n x n kvadrātiskām rūtiņām un kuram stūru rūtiņas izgrieztas (attēlā piemērs, ja n=7). Vai to var sadalīt šādās figūrās:  , ja

a) n = 7;

b) n = 8;

c) n = 9 ?



12. No dārza līdz mājām ir 10 km. Kad Ome ar ābolu grozu no dārza sāka iet mājās, Mazdēls ar riteni brauca viņai pretim. Kad viņi satikās, Mazdēls paņēma daļu no āboliem un veda uz mājām. Nonācis mājās, viņš ābolus tur atstāja un atkal brauca pretim Omei. Tā viņš atkārtoja, līdz Ome bija pārnākusi mājās. Cik km Mazdēls veica, ja viņš brauca ar ātrumu 20km/h, bet Ome gāja ar ātrumu 4 km/h ?

13. Mežā dzīvo 21 alnis. Daži aļņi draudzējas savā starpā (ja viens alnis draudzējas ar otru, tad otrais draudzējas ar pirmo). Vai ir iespējams, ka katram alnim ir tieši 7 draugi?

14. Cik kopīgu punktu var būt divu trijstūru kontūrām?

15. Karaļvalstī ir 8 pilsētas. Karaliene grib uzbūvēt tādu ceļu sistēmu, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, iebraucot ne vairāk kā vienā citā pilsētā, un no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļu. Pie kāda mazākā k tas iespējams?

Komandu olimpiāde „Dzidrais Vilnis 2005”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 7. klasei

1. Plaknē atzīmēts 21 punkts. Novilktas 10 taisnes tā, ka katrs no atzīmētajiem punktiem pieder kādai no tām. Pierādīt, ka var izvēlēties 3 no dotajiem punktiem tā, ka tie atrodas uz 1 taisnes.

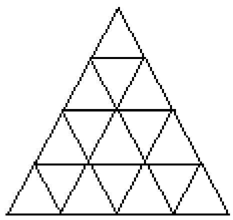
2. Pa vienai reizei uzrakstīta katrs veselais pozitīvais skaitlis no 1 līdz 2005 ieskaitot. Cik reizes uzrakstīts cipars 2?

3. Pierādīt, ka 5 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 120.

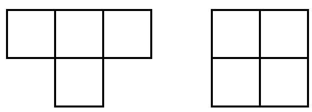
4. Lai nokrāsotu kubu ar izmēriem 3x3x3, nepieciešams 1 kg krāsas. Kubu nokrāsoja un sadalīja kubiņos 1x1x1. Cik *vēl* krāsas nepieciešams, lai pilnībā nokrāsotu mazos kubiņus? *(jau nokrāsotās skaldnes nepārkrāso!)*

5. No skaitļa 2005 atņem tā ciparu summu. No iegūtā skaitļa, savukārt, šī skaitļa ciparu summu. Tā turpina, līdz iegūst viencipara skaitli. Atrast šo skaitli!

6. Dots laukums (skat. zīmējumu). Sākumā drīkst nolikt kauliņu uz kāda no mazajiem trijstūriem. Tad drīkst pārvietot šo kauliņu uz kādu citu mazo trijstūri, kuram ir kopīga mala ar iepriekšējo. Pierādīt, ka nevar izstaigāt visu laukumu, katrā mazajā trijstūrī esot tieši vienu reizi!



7. Vai 8x8 rūtiņu kvadrātu var sagriezt septiņās figūrās „T” un deviņās figūrās „O” ?



Figūra "T" Figūra "O"

8. Slimniekam tika izrakstītas divu veidu tabletes. Tās viņam jādzer ik pēc noteikta laika sprīža pa vienai tabletei no katra veida. Jebkura cita kombinācija ir bīstama veselībai un dzīvībai. Kad bija atlikušas 4 tabletes (pa 2 no katra veida), viņš tās nejauši sabēra kopā, un nu tās vairs nevar atšķirt. Vai viņš var pabeigt ārstēšanos, nepakļaujot veselību riskam?

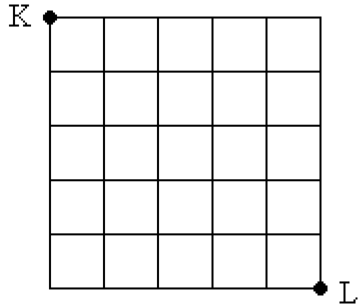
9. Naturālu skaitļu virkni veido sekojoši: pirmais loceklis ir 1. Katrs nākamais virknes loceklis tiek iegūts, iepriekšējo reizinot ar 2 un pieskaitot 1. Cik starp pirmajiem 2005 virknes locekļiem ir tādi, kuri dalās ar 5?

10. Mežā dzīvo 24 aļņi. Daži no viņiem vienmēr melo, pārējie vienmēr saka patiesību. Aļņi stāv pa apli tā, ka meļiem blakus stāv tikai vecāki aļņi. Katram no aļņiem uzdeva divus jautājumus. Vai tu esi vecāks par alni pa labi no tevis? Vai tu esi vecāks par alni pa kreisi no tevis? (Nav divu aļņu, kas būtu vienādi veci.) Uz pirmo jautājumu kopā tika saņemtas 9 apstiprinošas atbildes, bet uz otro jautājumu 17 apstiprinošas atbildes. Cik no aļņiem ir meļi?

11. Skolā mācās 1000 skolēnu, 350 ir braukuši ar BMW, 100 ar Audi un 323 ar Mazdu. 116 no skolēniem ir braukuši gan ar BMW, gan ar Mazdu, 30 ir braukuši gan ar Audi, gan ar Mazdu, 46 ir braukuši gan ar Audi, gan ar BMW. 9 no skolēniem ir braukuši gan ar BMW, gan ar Audi, gan ar Mazdu.

a) Cik skolēni ir braukuši BMW, bet nav braukuši ar Audi?
b) Cik skolēni ir braukuši ar Mazdu, bet nav braukuši nedz ar BMW, nedz ar Audi?
c) Cik skolēnu nav braukuši ne ar vienu no šīm automašīnām?

12. Dota pilsētas ielu karte. Cik dažādos veidos Vilnis var nokļūt no punkta K līdz punktam L, ja drīkst pārvietoties tikai virzienā uz leju un virzienā pa labi? Atrast visus iespējamos Viļņa maršruta garumus, ja attālums starp diviem blakus krustojumiem ir 50 metri!



13. Lūsim redīsu laukā aug m redīsi, bet vilkam z redīsi. Lūša laukā redīsu skaits dubultojas ik pēc 8 mēnešiem, bet vilka redīsu skaits paliek nemainīgs (slikts laukkopis). Pēc 4 gadiem kopējais redīsu skaits abos laukos bija astoņkāršojies. Kuram no viņiem sākumā bija vairāk redīsu un cik reizes vairāk?

14. Ūdenspolo turnīrā piedalījās k komandas. Vai iespējams, ka turnīra laikā bija tāds brīdis, kad katra komanda bija izspēlējusi tieši 3 spēles,

a) ja $k = 6$;
b) ja $k = 7$?

15. Orbitrekam ir 10 pēc ārējā izskata vienādi āboli. Divi no tiem ir tārpaini. Orbitreks ir izgudrojis tārpu detektoru, kurā ieliekot dažus ābolus (varbūt vienu), var noteikt, vai to skaitā ir kāds tārpains ābols. Diemžēl ar šo detektoru var veikt tikai 6 pārbaudes. Vai Orbitreks var atrast tārpainos ābolus?

2008. gada komandu olimpiāde

Citu variantu nav

Uzdevumi 7. klasei.

1) Olgai ir dzeltenas, zilas un sarkanas bumbiņas. Sarkano un dzelteno kopā ir tikpat, cik zilo. Ja dzelteno bumbiņu skaitu pieckāršotu, tad to būtu par 2 mazāk nekā zilo. Savukārt, ja zilo bumbiņu skaitu palielinātu par 5 bumbiņām, tad sarkano bumbiņu būtu divreiz mazāk nekā zilo. Cik Olgai ir bumbiņu?

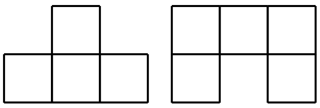
2) Bagātajam Ričam garāžā ir trīs marku automašīnas – Audi, Honda, Toyota. Hondu skaits garāžā ir ne vairāk kā $\frac{2}{5}$ no Audi skaita, taču vismaz divreiz lielāks nekā Toyotu skaits. Pierādiet, ka Ričs tiešām ir bagāts (t.i., ka viņam garāžā stāv vismaz 8 automašīnas)!

3) Dota skaitļu virkne 1; 2; 3; 4 ... 6^5. Cik šajā virknē ir skaitļu, kas dalās ar 2^5 ?

4) Handbola turnīrā piedalās 9 komandas. Katra komanda ir izspēlējusi tieši 7 spēles. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par zaudējumu 0 punktu, neizšķirtu nav. Pierādīt, ka var atrast divas komandas ar vienādu punktu skaitu!

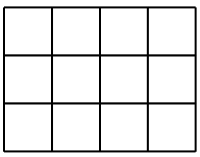
5) Gallijas iedzīvotājiem patīk iesaistīties biedrībās. Katrs iedzīvotājs ir iesaistījies tieši 3 biedrībās. Turklāt katrā biedrībā ir tieši 4 biedri. Pierādīt, ka Gallijas iedzīvotājus var sadalīt četrās skaita ziņā vienādās daļās.

6) Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem a)6 x 12; b) 10 x 12? (Figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties)



7) Pierādīt, ka jebkuru 37 pēc kārtas ņemtu skaitļu summa dalās ar 37.

8) Vai dotā taisnstūra rūtiņas var aizpildīt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru skaitli izmantojot tieši vienu reizi) tā, ka gan katras kolonnas, gan katras rindas skaitļu summa dalās ar 13?



9) Ābolu kaudzē sākotnēji bija 23 āboli. Ilze katru dienu no ābolu kaudzes apēda 4 ābolus, bet Harijs 3 ābolus. Savukārt vecmāmiņa katru dienu no rīta kaudzei pielika klāt tieši tikpat ābolu, cik bija palicis pāri iepriekšējās dienas beigās. Jānītis gribēja būt taisnīgs un apgalvoja, ka ābolus ēdīs tikai tad, kad ābolu kaudzi varēs sadalīt 3 vienādās daļās. Vai Jānītis jebkad tiks pie ābolu ēšanas?

10) Leldei tika aizsietas acis, un viņa tika nosēdināta pie galda, uz kura atradās ļoti liels daudzums viena lata monētu. Tieši 128 no tām bija pagrieztas ar ciparu uz augšu, pārējās – ar ģerboni uz augšu. Pēc taustes visas monētas šķiet vienādas. Kā Leldei rīkoties, lai sadalītu monētas divās daļās tā, lai katrā no daļām būtu vienāds daudzums monētu ar ciparu uz augšu.

11) Orbitreks Mārtiņdienā izlasīja 2 grāmatas. Sākot ar nākamo dienu, viņš katru dienu izlasa par 2 grāmatām vairāk nekā iepriekšējā dienā. Vai var gadīties, ka kādas dienas beigās Orbitreka kopējais izlasīto grāmatu skaits ir 2006?

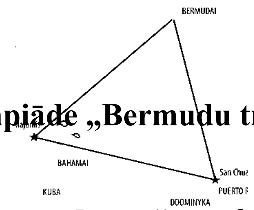
12) Ījans brokastīs vēlas uzvārīt „septiņu minūšu" olu. Viņam ir divi smilšu pulksteņi, ar kuriem ir iespējams izmērīt attiecīgi 5 un 11 minūšu intervālu. Lai ola būtu garšīga, tā jāvāra tieši septiņas minūtes bez pārtraukuma. Vai Ījans var tikt pie kārotās olas? Ja jā, tad kā?

13) Dotas 4 riņķa līnijas, kuras savstarpēji veido k krustpunktus. Kādas ir iespējamās k vērtības?

14) Četri dažādi augļi (banāns, ābols, apelsīns un mandarīns) ir ielikti 4 kastēs – katrā pa vienam auglim. Cilvēkiem ļāva minēt, kurš auglis ir kurā kastē. Kopā piedalījās 123 minētāji un rezultāti bija sekojoši: 43 cilvēki neatminēja nevienu augli pareizi, 39 – vienu, 31 divus. Cik cilvēku atminēja 3 augļus pareizi un cik – visus četrus pareizi?

15) Uz rūtiņa lapas uzzīmēts šaha galdiņš. Vai Rūdim ir iespējams sagriezt (griežot tikai pa rūtiņu malām) šo šaha galdiņu tā, ka katra figūra sastāv no divreiz vairāk vienas krāsas laukumiņiem nekā otras krāsas laukumiņiem?

16) Dotas 8 pēc izskata vienādas monētas un sviras svari bez atsvariem. 5 no tām ir izgatavotas no sudraba, bet pārējās 3 - no alumīnija (tātad tās ir vieglākas par sudraba monētām). Vai ar 4 svēršanām ir iespējams atrast visas alumīnija monētas?



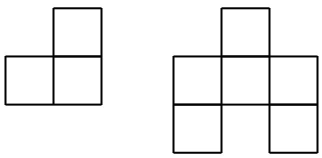
Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 7. klasei

1. Doti 5 skaitļi. Katru divu skaitļu summa ir lielāka par 4. Pierādīt, ka visu piecu skaitļu summa ir lielāka par 10.

2. Vai no dotajām figūrām var salikt a) 8x8; b) 9x9 rūtiņu tīklu, katru no tām izmantojot vismaz vienu reizi (figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties).



3. Skolā mācās 2007 skolēni. Ir skolēni, kuri pazīst viens otru, ir arī tādi, kuri nav pazīstami. (Visas pazīšanās ir abpusējas.) Vai skolā noteikti ir tāds skolēns, kurš pazīst pāra skaitu citu skolēnu?

4. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atvieglojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1;3,5,7,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2,4,6,8,10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.

5. Skaitli a sauc par *pirmklasīgu*, ja skaitļu a; a^2 un $a+ a^2$ ciparu summas ir pirmskaitlis.
   a) Atrodiet vismaz vienu *pirmklasīgu* divciparu skaitli!
   b) Vai 3a var būt *pirmklasīgs* skaitlis?

6. Dotas 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās un sviru svari bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?

7. Olga uzrakstīja trīsciparu skaitli. Renārs pierakstīja Olgas skaitlim galā tādu pašu trīsciparu skaitli, tādējādi iegūstot sešciparu skaitli. Pierādīt, ka iegūtais skaitlis noteikti dalās ar trīs pēc kārtas ņemtiem pirmskaitļiem.

8. Orbitreku ciemā ir 20 ciltis, kuras pielūdz dievības. Katru dievību pielūdz tieši 3 ciltis. Orbitreki uzskata, ka brīdi, kad kāda cilts pielūdz tieši 7 dievības, tā atrodas *balansā.* Viedākie Orbitreki ir pierādījuši, ka brīdi, kad visas ciltis būs *balansā*, tad pienāks Pasaules gals. Vai Pasaules gals var pienākt?

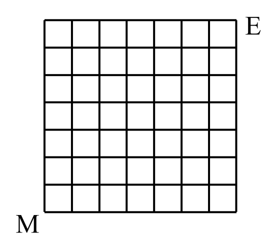
9. Rindā nostājušies 20072007 elfi. Daži no elfiem vienmēr runā tikai taisnību, bet pārējie vienmēr melo. Katrs no elfiem apgalvoja, ka vairāk kā trešdaļa no viņa pa kreisi stāvošajiem elfiem melo. Pierādīt, ka tieši trešdaļa no elfiem ir meļi.

10. No pirmajiem 80 naturālajiem skaitļiem izvēlējās 20 pāra skaitļus un 20 nepāra skaitļus. Izvēlēto pāra skaitļu summa ir vienāda ar izvēlēto nepāra skaitļu summu. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem ir divi tādi, kuru summa ir 81.

11. Katrā kvadrāta *ABCD* virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi- dzeltena, trešo reizi- sarkana, ceturto reizi- dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes *A* un *C* ir sarkanas, bet *B* un *D* vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdžus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

12. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1; 0; 1. Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2x2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0, bet katrā 3x3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1?

13. Dots 7 x 7 rūtiņu tīkls ar rūtiņu malu garumu 1 metrs. Spēlētāji Mārtiņš un Edgars pamīšus pārvieto savus kauliņus pa rūtiņu virsotnēm. Turklāt kauliņus gājienā drīkst pārvietot tieši par 1 metru un tikai uz virsotnēm, uz kurām iepriekš nav bijis neviens cits kauliņš. Mārtiņš spēli uzsāk no virsotnes M, bet Edgars no virsotnes E. Spēlētājs, kurš vairs nespēj izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot, ja



14. Uz skaitļu taisnes atzīmēti visi veselie punkti, t.i., punkti, kuri atbilst veseliem skaitļiem. Katrus divus punktus *x* un *y* savieno ar loku, ja $|x-y$ ir pirmskaitlis. Kāds ir mazākais to krāsu skaits, kurās var nokrāsot visus atzīmētos punktus tā, lai katri divi ar loku savienotie punkti būtu nokrāsoti dažādās krāsās?

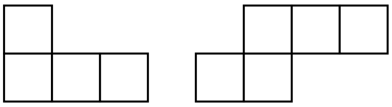
15. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši 2 reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7. Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

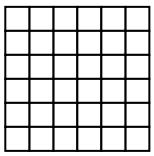
Uzdevumi 7. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Par maģisku kvadrātu sauc tādu 4x4 rūtiņu kvadrātu, kurā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 16 (katrs skaitlis tieši vienu reizi) tā, ka katrā rindiņā, kolonnā un abās garākajās diagonālēs skaitļu summas ir vienādas. Atrodiet kaut vienu maģisko kvadrātu!

3. Dots 6x6 rūtiņu kvadrāts. Cik ir tādu kvadrātu, kuru visas malas vilktas pa dotā kvadrāta rūtiņu līnijām?



4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1000. Mārtiņam patīk tikai tādi skaitļi, kas dalās gan ar 10, gan 12, gan 20. Cik skaitļu paliktu uz tāfeles, ja Mārtiņš nodzēstu visus skaitļus, kas viņam nepatīk?

5. Cik ir tādu trīsciparu skaitļu, kuru ciparu summa dalās ar

a) 3?
b) 25?

6. Pierādīt $2^7+3\cdot2^6+3^2\cdot2^5+3^3\cdot2^4+3^4\cdot2^3+3^5\cdot2^2+3^6\cdot2^1+3^7=3^8-2^8$.

7. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

8. Noliktavā ir 3 ābolu šķirnes – *zaļie* āboli, *garšīgie* un *poļu*. Ir zināms, ka 50% no visiem āboliem ir *zaļie*, 30% *garšīgie* un 20% *poļu*. Mēneša beigās pēc ražas novākšanas *zaļo* ābolu skaits palielinājās par 20%, bet *poļu* par 25%, bet *garšīgo* skaits par $66\frac{2}{3}$%, kā arī pēc ābolu palielinājuma atklājās, ka 40% no visiem *zaļās* šķirnes āboliem un 22% no *garšīgo* šķirnes ir sapuvuši., bet no *poļu* šķirnes nebija sapuvis neviens. Ja pieņem, ka visus sapuvušos ābolus izmeta ārā, tad, cik mēneša beigās procentuāli bija *zaļo* ābolu un cik- *garšīgo*?

9. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

10. Uz tāfeles uzrakstīti 10 naturāli skaitļi. Katru divu uzrakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 2, bet mazākais kopīgais dalāmais 90. Aprēķināt doto skaitļu reizinājumu!

11. Doti 5 naturāli skaitļi. Nekādu divu starpība nedalās ar 5. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 5.

12. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot liftu 7 reizes? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.
b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

13. Futbola čempionātā piedalās 8 komandas. Pirmajās 10 spēļu kārtās 17 spēles beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Anatolijs ir pierādījis, ja 11. izspēles kārtā savā starpā spēlēs 2 komandas, kurām kopējais nospēlēto neizšķirtu skaits ir lielāks par 8, tad to spēle arī beigsies ar neizšķirtu. Pierādiet, ka 11. spēļu kārtā vismaz viena spēle beigsies ar neizšķirtu!

14. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

15. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{2009\}$$

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa"

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 10 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

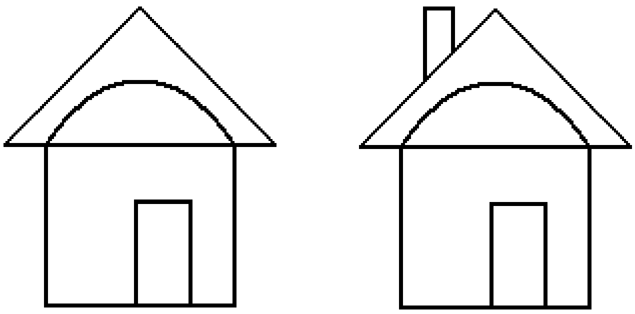
Uzdevumi 7. klasei

1. Aprēķināt leņķi starp pulksteņa stundu un minūšu rādītājiem plkst. 10:20.

2. Plaknē ir 4 taisnes, kuras krustojas n punktos. Kādas ir iespējamās n vērtības?

3. Cik starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tādu pāra skaitļu, kuri ir naturālu skaitļu kvadrāti?

4. Jūlers grib uzzīmēt mājiņu (skat. zīm.), neatraujot pildspalvu no papīra un katru līniju novelkot vienu reizi. Vai tas ir iespējams? Bet mājiņu ar skursteni?



5. Mārtiņš un Marta cimdu bloku uzadīja 5 stundās. Marta uzadīja 20 cimdu pārus. Savukārt mazais Pjērs un Mārtiņš, mazajam Pjēram uzadot 14 cimdu pārus, cimdu bloku uzadīja 8 stundās. Cik cimdu pāru ir vienā cimdu blokā?

6. Ilzīte dzīvo uz ielas, kurai mājas tās malās novietotas tieši pretī viena otrai (nav māju, kurai pretī nebūt neviena cita māja). Māju numuri ir 1, 2, 3, ... u.t.t . vienā ielas malā no ielas sākuma līdz ielas galam. Numerācija turpinās otrā ielas malā no ielas beigām līdz ielas sākumam. Māja ar numuru 37 ir tieši pretī mājai ar numuru 78. Cik māju pavisam ir šajā ielā?

7. Banka izkala 6 jubilejas monētas. Divas no monētām izrādījās brāķa – tās bija par 0,01 gramu vieglākas nekā parējās 4 monētās, kurām bija vienāds svars. Monetārā specvienība iegādājās smalkus sviru svarus, bet ar tiem dienas laikā var veikt tikai 3 svērienus, nezaudējot precizitāti. Vai monetārajai specvienībai ir iespējams dienas laikā atrast 4 pareizās monētas un laist tās apgrozībā?

8. Uz Orbitreku planētas visi Orbitreki, kas kaut vienu reizi ir paspieduši roku kādam citam Orbitrekam, dzīvo mūžīgi. Vai no visiem Orbitrekiem tādi, kas izdarījuši nepāra skaita rokas spiedienu, ir pāra vai nepāra skaits?

9. 5x6 rūtiņu laukuma stūrī novietots šaha zirdziņš. Šaha zirdziņš drīkst pārvietoties divas rūtiņas jebkurā virzienā un pēc tam vienu rūtiņu pa labi vai kreisi no sākotnējā kustības virziena. Vai ar zirdziņu var apstaigāt doto laukumu tā, lai katrā rūtiņā zirdziņš nostātos tieši vienu reizi?

10. Pierādīt, ka skaitlim 2009^{2008} ir nepāra skaits dalītāju.

11. Dots 21 naturāls skaitlis, visi dažādi un ne lielāki par 100. Vai noteikti var izvēlēties četrus no tiem (apzīmēsim tos ar a, b, c un d) tā, lai $a + b = c + d$?

12. Lai veiktu maģisku rituālu, ir jāpanāk, ka melnais un baltais gredzens ir apmainīti vietām, strīpaino gredzenu atstājot sākotnējā pozīcijā. Pārbīdot gredzenus, drīkst mainīt strīpainā gredzena pozīciju. Vai to ir iespējams paveikt, ja gredzenus drīkst pārbīdīt tikai uz pretēju brīvu stūri?

13. Autobusu sauc par pārpildītu, ja tajā ir vairāk par 60 pasažieriem. 25. oktobrī ekspresmaršrutā Rīga – Mazsalaca tika veikta pasažieru skaitīšana. Tika aprēķināti divi rādītāji procentos: A – pārpildīto autobusu skaits pret kopējo, un B – pasažieru, kas brauca pārpildītos autobusos, skaits pret kopējo. Kurš no šiem rādītājiem ir lielāks, ja zināms, ka bija gan pārpildīti, gan nepārpildīti autobusi?

14. 9002. gadā ap Zemi pa riņķveida orbītām vienā plaknē riņķo 5 pavadoņi. Zemi tie apriņķo attiecīgi 4, 6, 10, 20 un 22 mēnešos. 21. novembrī visi pavadoņi būs nostājušies uz vienas taisnes ar Zemi.

a) Pēc cik mēnešiem būs vēlreiz novērojams tieši šāds pats pavadoņu stāvoklis?

b) Pēc cik mēnešiem visi pavadoņi atkal būs uz šīs pašas taisnes?

15. Sniegbaltīte uzaicināja 7 rūķīšus uz zaļumballi, bet brīdināja – pirms zaļumballes katram rūķītim uz galvas uzliks sarkanu vai zilu cepuri (savu cepuri neredz, bet pārējās – redz). Rūķīšiem pēc kārtas liks, visiem dzirdot, izteikt minējumu par savas cepures krāsu (jebkāda cita savstarpēja saziņa aizliegta). Zaļumballē ielaidīs tikai tos, kas uzminēs pareizi. Vai pirms došanās pie Sniegbaltītes viņiem ir iespējams vienoties par stratēģiju, kas garantētu vismaz 6 rūķīšu iekļūšanu zaļumballē?

Uzdevumu lapa 8.klasēm

RV1.Ģ komandu olimpiāde matemātikā pamatskolai

Svaigā Maize 2004

1. Dots: $a + b = 1$. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

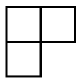
2. Dots ΔABC. Punkti M, N un K pieder attiecīgi malām BC, CA un AB. Nogriežņi AM, BN un CK krustojas vienā punktā O. Pierādīt:

$AM + BN + CK > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

3. No dārza līdz mājām ir 10 km. Kad Ome ar ābolu grozu no dārza sāka iet mājās, Mazdēls ar riteni brauca viņai pretim. Kad viņi satikās, Mazdēls paņēma daļu no āboliem un veda uz mājām. Nonācis mājās, viņš ābolus tur atstāja un atkal brauca pretim Omei. Tā viņš atkārtoja, līdz Ome bija pārnākusi mājās. Cik km Mazdēls veica, ja viņš brauca ar ātrumu 20km/h, bet Ome gāja ar ātrumu 4 km/h ?

4. Dotas 7 bumbiņas - 2 no tām ir citādā svarā nekā pārējās 5. Doti sviru svari bez atsvariem. Vai ar 5 svēršanām var atrast 2 citādās bumbiņas?

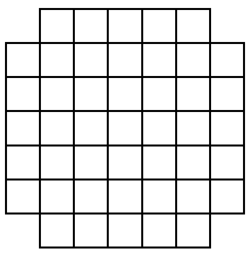
5. Karaļvalstī ir 8 pilsētas. Karaliene grib uzbūvēt tādu ceļu sistēmu, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, iebraucot ne vairāk kā vienā citā pilsētā, un no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļu. Pie kāda mazākā k tas iespējams?

6. Dots kvadrāts, kas sastāv no n x n kvadrātiskām rūtiņām un kuram stūru rūtiņas izgrieztas (attēlā piemērs, ja n=7). Vai to var sadalīt šādās figūrās:  , ja

a) $n = 7$;

b) $n = 8$;

c) $n = 9$?



7. Mežā dzīvo 21 alnis. Daži aļņi draudzējas savā starpā (ja viens alnis draudzējas ar otru, tad otrais draudzējas ar pirmo). Vai ir iespējams, ka katram alnim ir tieši 7 draugi?

8. Vai pa rūtiņu tīklu var uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kuras posmu garumi ir pēc kārtas 1,2,...,n rūtiņas, ja

a) $n = 8$

b) $n = 9$

c) $n = 10$

9. Vai kvadrātā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 36 katru vienu reizi tā, lai katrā kolonnā un rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar

a) 9 ;

b) 27 ?

10. Dota lapa ar regulāru trijstūri, lineāls bez atzīmēm, cirkulis un zīmulis. Konstruēt regulāru sešstūri (aprakstīt risinājuma gaitu).

Piezīme: daudzstūri sauc par regulāru, ja visas tā malas ir vienādas un visi leņķi vienlieli.

11. Noteikt visus reālu skaitļu pārus (a;b), kuriem izpildās vienādība

$$a^2 + b^2 = \frac{5ab}{2}$$

12. a, b, c, d - četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ dalās ar 4.

13. Ar k apzīmēsim naturālu skaitli. Virknes pirmais loceklis ir $a_1=k-1$.

$a_n=a_{n-1}+k^{a_{n-1}}$. Pierādīt, ka neviens virknes loceklis nedalās ar k.

14. Skaitļu pāri sauc par *spēcīgu*, ja šo skaitļu kvadrātu starpība ir vienāda ar kāda skaitļa kubu, bet šo skaitļu kubu starpība - ar kāda skaitļa kvadrātu.

a) atrast kaut vienu *spēcīgu* skaitļu pāri;

b) pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *spēcīgi* skaitļu pāri.

15. Apskatām visus veselos un pozitīvos skaitļus, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3; 4 un 5. Sakārtosim tos augošā secībā un ar n apzīmējam skaitli, kas šajā sarakstā atrodas 2004-ajā vietā.

a) cik ciparu ir skaitlim n ?

b) atrast skaitli n.

Komandu olimpiāde „Dzidrais Vilnis 2005”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

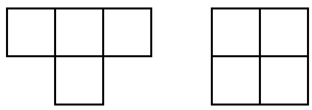
1. Pa vienai reizei uzrakstīta katrs veselais pozitīvais skaitlis no 1 līdz 2005 ieskaitot. Cik reizes uzrakstīts cipars 2?

2. Plaknē atzīmēts 21 punkts. Novilktas 10 taisnes tā, ka katrs no atzīmētajiem punktiem pieder kādai no tām. Pierādīt, ka var izvēlēties 3 no dotajiem punktiem tā, ka tie atrodas uz 1 taisnes.

3. Pierādīt, ka 5 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 120.

4. Dots, ka $a > b$ un $x > y$. Pierādīt, ka $ax + by > ay + bx$.

5. Vai 8x8 rūtiņu kvadrātu var sagriezt septiņās figūrās „T” un deviņās figūrās „O” ?



Figūra "T" Figūra "O"

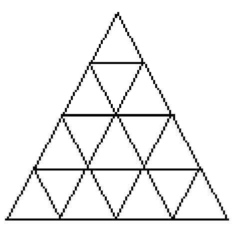
6. Slimniekam tika izrakstītas divu veidu tabletes. Tās viņam jādzer ik pēc noteikta laika sprīža pa vienai tabletei no katra veida. Jebkura cita kombinācija ir bīstama veselībai un dzīvībai. Kad bija atlikušas 4 tabletes (pa 2 no katra veida), viņš tās nejauši sabēra kopā, un nu tās vairs nevar atšķirt. Vai viņš var pabeigt ārstēšanos, nepakļaujot veselību riskam?

7. Ūdenspolo turnīrā piedalījās k komandas. Vai iespējams, ka turnīra laikā bija tāds brīdis, kad katra komanda bija izspēlējusi tieši 3 spēles.

a) Ja $k = 6$

b) Ja $k = 7$

8. Dots vienādmalu trijstūris, kuram malas garums ir m. Tas sadalīts mazākos trijstūrīšos ar malas garumu 1 (skat. zīmējumā piemēru ar m=4). Par cik atšķiras △ un ▽ trijstūrīšu skaits?



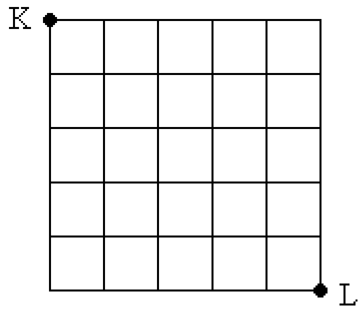
9. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2005. Kādu skaitļu ir vairāk – pāra skaitļu ar nepāra ciparu summu vai nepāra skaitļu ar pāra ciparu summu?

10. Lūsim redīsu laukā aug m redīsi, bet vilkam z redīsi. Lūša laukā redīsu skaits dubultojas ik pēc 8 mēnešiem, bet vilka redīsu skaits paliek nemainīgs (slikts laukkopis). Pēc 4 gadiem kopējais redīsu skaits abos laukos bija astoņkāršojies. Kuram no viņiem sākumā bija vairāk redīsu un cik reizes vairāk?

11. Skolā mācās 1000 skolēnu, 350 ir braukuši ar BMW, 100 ar Audi un 323 ar Mazdu. 116 no skolēniem ir braukuši gan ar BMW, gan ar Mazdu, 30 ir braukuši gan ar Audi, gan ar Mazdu, 46 ir braukuši gan ar Audi, gan ar BMW. 9 no skolēniem ir braukuši gan ar BMW, gan ar Audi, gan ar Mazdu.

a) Cik skolēni ir braukuši BMW, bet nav braukuši ar Audi?
b) Cik skolēni ir braukuši ar Mazdu, bet nav braukuši nedz ar BMW, nedz ar Audi?
c) Cik skolēnu nav braukuši ne ar vienu no šīm automašīnām?

12. Dota pilsētas ielu karte. Cik dažādos veidos Vilnis var nokļūt no punkta K līdz punktam L, ja drīkst pārvietoties tikai virzienā uz leju un virzienā pa labi? Atrast visus iespējamos Viļņa maršruta garumus, ja attālums starp diviem blakus krustojumiem ir 50 metri!



13. Mežā dzīvo 24 aļņi. Daži no viņiem vienmēr melo, pārējie vienmēr saka patiesību. Aļņi stāv pa apli tā, ka meļiem blakus stāv tikai vecāki aļņi. Katram no aļņiem uzdeva divus jautājumus. Vai tu esi vecāks par alni pa labi no tevis? Vai tu esi vecāks par alni pa kreisi no tevis? (Nav divu aļņu, kas būtu vienādi veci.) Uz pirmo jautājumu kopā tika saņemtas 9 apstiprinošas atbildes, bet uz otro jautājumu 17 apstiprinošas atbildes. Cik no aļņiem ir meļi?

14. Skaitļu virknē katrs nākamais skaitlis ir divu iepriekšējo skaitļu summa. Pirmie divi skaitļi ir vieninieki (1; 1; 2; 3; 5...). Pierādīt apgalvojumu: ja virknē kāds skaitlis dalās ar k, tad virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kuri dalās ar k.

15. Orbitrekam ir 10 pēc ārējā izskata vienādi āboli. Divi no tiem ir tārpaini. Orbitreks ir izgudrojis tārpu detektoru, kurā ieliekot dažus ābolus (varbūt vienu), var noteikt, vai to skaitā ir kāds tārpains ābols. Diemžēl ar šo detektoru var veikt tikai 6 pārbaudes. Vai Orbitreks var atrast tārpainos ābolus?

2008. gada komandu olimpiāde

Citu variantu nav

Uzdevumi 8. klasei.

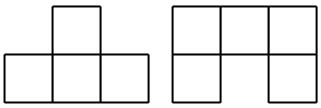
1) Bagātajam Ričam garāžā ir trīs marku automašīnas – Audi, Honda, Toyota. Hondu skaits garāžā ir ne vairāk kā $\frac{2}{5}$ no Audi skaita, taču vismaz divreiz lielāks nekā Toyotu skaits. Pierādiet, ka Ričs tiešām ir bagāts (t.i., ka viņam garāžā stāv vismaz 8 automašīnas)!

2) Dota skaitļu virkne 1; 2; 3; 4 ... 6^5. Cik šajā virknē ir skaitļu, kas dalās ar 2^5 ?

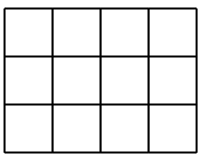
3) Handbola turnīrā piedalās 9 komandas. Katra komanda ir izspēlējusi tieši 7 spēles. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par zaudējumu 0 punktu, neizšķirtu nav. Pierādīt, ka var atrast divas komandas ar vienādu punktu skaitu!

4) Gallijas iedzīvotājiem patīk iesaistīties biedrībās. Katrs iedzīvotājs ir iesaistījies tieši 3 biedrībās. Turklāt katrā biedrībā ir tieši 4 biedri. Pierādīt, ka Gallijas iedzīvotājus var sadalīt četrās skaita ziņā vienādās daļās.

5) Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem a)6 x 12; b) 10 x 12? (Figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties)



6) Vai dotā taisnstūra rūtiņas var aizpildīt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru skaitli izmantojot tieši vienu reizi) tā, ka gan katras kolonnas, gan katras rindas skaitļu summa dalās ar 13?



7) Ābolu kaudzē sākotnēji bija 23 āboli. Ilze katru dienu no ābolu kaudzes apēda 4 ābolus, bet Harijs 3 ābolus. Savukārt vecmāmiņa katru dienu no rīta kaudzei pielika klāt tieši tikpat ābolu, cik bija palicis pāri iepriekšējās dienas beigās. Jānītis gribēja būt taisnīgs un apgalvoja, ka ābolus ēdīs tikai tad, kad ābolu kaudzi varēs sadalīt 3 vienādās daļās. Vai Jānītis jebkad tiks pie ābolu ēšanas?

8) Dots trijstūris ABC, uz malas BC atlikts punkts D. Punkti M, K un L ir attiecīgi nogriežņu AB, AD un AC viduspunkti. Pierādīt, ka M, K un L atrodas uz vienas taisnes.

9) Leldei tika aizsietas acis, un viņa tika nosēdināta pie galda, uz kura atradās ļoti liels daudzums viena lata monētu. Tieši 128 no tām bija pagrieztas ar ciparu uz augšu, pārējās – ar ģerboni uz augšu. Pēc taustes visas monētas šķiet vienādas. Kā Leldei

rīkoties, lai sadalītu monētas divās daļās tā, lai katrā no daļām būtu vienāds daudzums monētu ar ciparu uz augšu.

10) Orbitreks Mārtiņdienā izlasīja 2 grāmatas. Sākot ar nākamo dienu, viņš katru dienu izlasa par 2 grāmatām vairāk nekā iepriekšējā dienā. Vai var gadīties, ka kādas dienas beigās Orbitreka kopējais izlasīto grāmatu skaits ir 2006?

11) Ījans brokastīs vēlas uzvārīt „septiņu minūšu" olu. Viņam ir divi smilšu pulksteņi, ar kuriem ir iespējams izmērīt attiecīgi 5 un 11 minūšu intervālu. Lai ola būtu garšīga, tā jāvāra tieši septiņas minūtes bez pārtraukuma. Vai Ījans var tikt pie kārotās olas? Ja jā, tad kā?

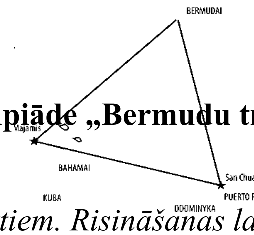
12) Dotas 4 riņķa līnijas, kuras savstarpēji veido k krustpunktus. Kādas ir iespējamās k vērtības?

13) Četri dažādi augļi (banāns, ābols, apelsīns un mandarīns) ir ielikti 4 kastēs – katrā pa vienam auglim. Cilvēkiem ļāva minēt, kurš auglis ir kurā kastē. Kopā piedalījās 123 minētāji un rezultāti bija sekojoši: 43 cilvēki neatminēja nevienu augli pareizi, 39 – vienu, 31 divus. Cik cilvēku atminēja 3 augļus pareizi un cik – visus četrus pareizi?

14) Uz rūtiņa lapas uzzīmēts šaha galdiņš. Vai Rūdim ir iespējams sagriezt (griežot tikai pa rūtiņu malām) šo šaha galdiņu tā, ka katra figūra sastāv no divreiz vairāk vienas krāsas laukumiņiem nekā otras krāsas laukumiņiem?

15) Gabriēls izsita logu un brīnumainā kārtā atklāja, ka visas stikla lauskas ir trijstūra formā, turklāt lausku stūri veidoja tikai tādus leņķus, kas dalās ar 30 grādiem. Sīkāk papētot, viņš ievēroja, ka katras lauskas īsākā mala ir tieši 5 cm gara. Tagad Gabriēls vēlas atrast četras dažādas stikla lauskas. Vai viņam tas izdosies?

16) Dotas 8 pēc izskata vienādas monētas un sviras svari bez atsvariem. 5 no tām ir izgatavotas no sudraba, bet pārējās 3 - no alumīnija (tātad tās ir nedaudz vieglākas par sudraba monētām). Vai ar 4 svēršanām ir iespējams atrast visas alumīnija monētas?

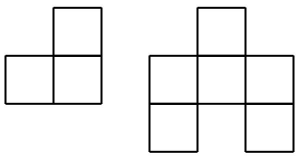


Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt a) 8x8; b) 9x9 rūtiņu tīklu, katru no tām izmantojot vismaz vienu reizi (figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties).



2. Vai septiņstūrim var būt
a) 6 šauri leņķi
b) 5 šauri leņķi

3. Skaitli *a* sauc par *pirmklasīgu*, ja skaitļu a; a^2 un $a+ a^2$ ciparu summas ir pirmskaitlis.
a) Atrodiet vismaz vienu *pirmklasīgu* divciparu skaitli!
b) Vai 3a var būt *pirmklasīgs* skaitlis?

4. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atvieglojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1;3,5,7,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2,4,6,8,10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.

5. Dots, ka x un y ir nenegatīvi skaitļi, kuru summa nepārsniedz 1. Pierādīt, ka $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$.

6. Doti skaitļi no 1 līdz 2007^2. Pieradīt, ka šo skaitļu atlikumu, dalot ar 2007, summa dalās ar 2007^2.

7. Dotas 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās n sviru svari bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?

8. Uz skaitļu taisnes atzīmēti visi veselie punkti, t.i., punkti, kuri atbilst veseliem skaitļiem. Katrus divus punktus x un y savieno ar loku, ja $|x-y$ ir pirmskaitlis. Kāds ir mazākais to krāsu skaits, kurās var nokrāsot visus atzīmētos punktus tā, lai katri divi ar loku savienotie punkti būtu nokrāsoti dažādās krāsās?

9. Rindā nostājušies 20072007 elfi. Daži no elfiem vienmēr runā tikai taisnību, bet pārējie vienmēr melo. Katrs no elfiem apgalvoja, ka vairāk kā trešdaļa no viņa pa kreisi stāvošajiem elfiem melo. Pierādīt, ka tieši trešdaļa no elfiem ir meļi.

10. Dotas trīs vienādības

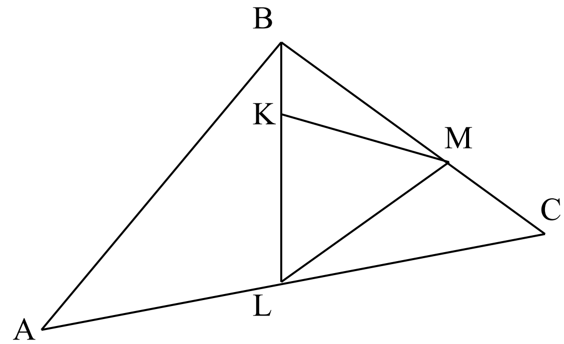
$$a^2+b^2=\frac{25ab}{12}$$

$$a^2+c^2=\frac{13ac}{6}$$

$$b^2+c^2=\frac{5bc}{2}$$

Atrast tādu skaitļu a,b,c trijnieku, ka visas trīs vienādības izpildās. Pierādīt, ka tādu trijnieku ir bezgalīgi daudz.

11. Trijstūra ABC leņķi sakrīt ar ΔLMC leņķiem, savukārt ΔLMC leņķi sakrīt ar ΔLMK leņķiem un ΔLMK leņķi sakrīt ar ΔKMB leņķiem. Noteikt leņķa B lielumu.



12. Skolotājam Gabrielam bija aizdomas, ka viņa stundā daži skolēni guļ. Slepus pirms stundas viņš klases visos 6 stūros (klasei ir tāda regulāra sešstūra forma, kura malas garums ir *a*) uzstādīja krācējmetrus. Katrs krācējmetrs fiksē to telpas iekšpusē guļošo skaitu, kuri no tā atrodas attālumā, kas nepārsniedz *a*. Pēc stundas izrādījās, ka visi krācējmetri kopā fiksējuši 7 guļošos.
Cik skolēnu gulēja stundā? (*Par regulāru sešstūri sauc sešstūri, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.*)

13. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1; 0; 1. Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2x2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0, bet katrā 3x3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1?

14. Katrā kvadrāta *ABCD* virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi- dzeltena, trešo reizi- sarkana, ceturto reizi- dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes *A* un *C* ir sarkanas, bet *B* un *D* vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdžus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

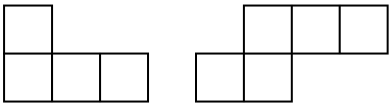
15. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši n reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7. Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

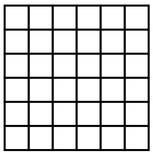
Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Dots 6x6 rūtiņu kvadrāts. Cik ir tādu kvadrātu, kuru visas malas vilktas pa dotā kvadrāta rūtiņu līnijām?



3. Pierādīt $2^8 + 3 \cdot 2^7 + 3^2 \cdot 2^6 + 3^3 \cdot 2^5 + 3^4 \cdot 2^4 + 3^5 \cdot 2^3 + 3^6 \cdot 2^2 + 3^7 \cdot 2^1 + 3^8 = 3^9 - 2^9$.

4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1000. Mārtiņam patīk tikai tādi skaitļi, kas dalās gan ar 10, gan 12, gan 20. Cik skaitļu paliktu uz tāfeles, ja Mārtiņš nodzēstu visus skaitļus, kas viņam nepatīk?

5. Noliktavā ir 3 ābolu šķirnes – *zaļie* āboli, *garšīgie* un *poļu*. Ir zināms, ka 50% no visiem āboliem ir *zaļie*, 30% *garšīgie* un 20% *poļu*. Mēneša beigās pēc ražas novākšanas *zaļo* ābolu skaits palielinājās par 20%, bet *poļu* par 25%, bet *garšīgo* skaits par $66\frac{2}{3}$ %, kā arī pēc ābolu palielinājuma atklājās, ka 40% no visiem *zaļās* šķirnes āboliem un 22% no *garšīgo* šķirnes ir sapuvuši., bet no *poļu* šķirnes nebija sapuvis neviens. Ja pieņem, ka visus sapuvušos ābolus izmeta ārā, tad, cik mēneša beigās procentuāli bija *zaļo* ābolu un cik *garšīgo*?

6. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

7. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltas bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

8. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot liftu 7 reizes? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

9. Kubu sagrieza 1000 vienādos mazākos kubiņos. Cik reižu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir lielāks par lielā kuba virsmas laukumu?

10. Doti 10 divciparu skaitļi. Jebkuru divu skaitļu starpība dalās ar 9. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 10.

11. Vēstures skolotājai jāsadala vēstures eksāmena dalībnieki vismaz 3 vienlīdz lielās grupās. Sadalot dalībniekus 3 vienādās grupās, 2 dalībnieki palika nekur neiekļauti, 4 grupās 2 dalībnieki palika pāri, 5 grupās 4 dalībnieki. Cik grupās galu galā skolotājai būtu jāsadala eksaminējamie skolēni, lai visi skolēni tiktu iekļauti un visas grupas būtu vienādās, ja zināms, ka eksāmenā nepiedalās vairāk par 73 skolēniem?

12. Uz tāfeles uzrakstīti 10 naturāli skaitļi. Katru divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 2, bet mazākais kopīgais dalāmais 90. Aprēķināt doto skaitļu reizinājumu!

13. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

14. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu skaitļu, kuriem dalītāju skaits ir nepāra pirmskaitlis.

15. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{2009\}$$

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 10 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 8. klasei

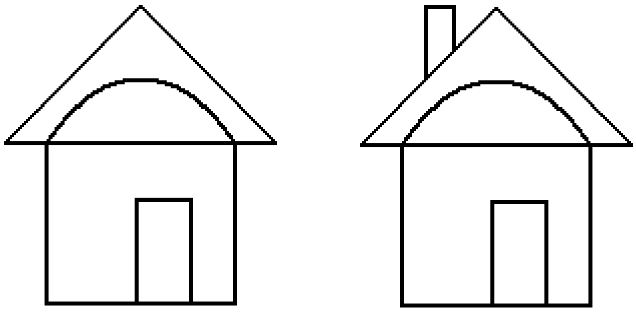
1. Kvadrāta ABCD iekšpusē ņemts tāds punkts P, ka ΔBPC ir vienādmalu trijstūris. Aprēķināt $\angle$ APD.

2. Cik starp skaitļiem no 1 līdz 2009 ir tādu pāra skaitļu, kuri ir naturālu skaitļu kvadrāti?

3. Plaknē ir 4 taisnes, kuras krustojas n punktos. Kādas ir iespējamās n vērtības?

4. Mārtiņš un Marta cimdu bloku uzadīja 5 stundās. Marta uzadīja 20 cimdu pārus. Savukārt mazais Pjērs un Mārtiņš, mazajam Pjēram uzadot 14 cimdu pārus, cimdu bloku uzadīja 8 stundās. Cik cimdu pāru ir vienā cimdu blokā?

5. Jūlers grib uzzīmēt mājiņu (skat. zīm.), neatraujot pildspalvu no papīra un katru līniju novelkot vienu reizi. Vai tas ir iespējams? Bet mājiņu ar skursteni?



6. Sadalīt reizinātājos $4a^4 + b^4$.

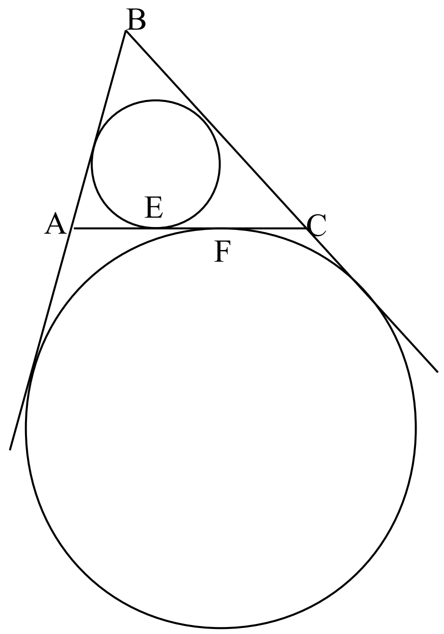
7. Banka izkala 6 jubilejas monētas. Divas no monētām izrādījās brāķa – tās bija par 0,01 gramu vieglākas nekā parējās 4 monētās, kurām bija vienāds svars. Monetārā specvienība iegādājās smalkus sviru svarus, bet ar tiem dienas laikā var veikt tikai 3 svērienus, nezaudējot precizitāti. Vai monetārajai specvienībai ir iespējams dienas laikā atrast 4 pareizās monētas un laist tās apgrozībā?

8. Autobusu sauc par pārpildītu, ja tajā ir vairāk par 60 pasažieriem. 25. oktobrī ekspresmaršrutā Rīga – Mazsalaca tika veikta pasažieru skaitīšana. Tika aprēķināti divi rādītāji procentos: A – pārpildīto autobusu skaits pret kopējo, un B – pasažieru, kas brauca pārpildītos autobusos, skaits pret kopējo. Kurš no šiem rādītājiem ir lielāks, ja zināms, ka bija gan pārpildīti, gan nepārpildīti autobusi?

9. Dots, ka k, l, m, n ir naturāli skaitļi. Vai vienlaicīgi var izpildīties 3 vienādības $k + l = 20$, $m + n = 6$, $km + ln = 89$?

10. Uz Orbitreku planētas visi Orbitreki, kas kaut vienu reizi ir paspieduši roku kādam citam Orbitrekam, dzīvo mūžīgi. Vai no visiem Orbitrekiem tādi, kas izdarījuši nepāra skaita rokas spiedienu, ir pāra vai nepāra skaits?

11. Dots, ka AB, BC, AC abu riņķa līniju kopīgās pieskares, E un F pieskaršanās punkti. Pierādīt, ka AE = FC.



12. Pieņemsim, ka a un d ir doti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka a+dn nevar būt pirmskaitlis visām naturālām n vērtībām.

13. Taisnstūris sadalīts m x n vienādās baltās rūtiņās. Visas rūtiņas, kurām nebija kopīgu malu ar tieši 4 citām rūtiņam, tika nokrāsotas sarkanas. Pēc tam visas rūtiņas, kurām nebija kopīgu malu ar 4 citām baltajām rūtiņām, arī tika nokrāsotas sarkanas. Kādām m un n vērtībām sarkano un balto rūtiņu skaits taisnstūrī ir vienāds!

14. Mazais Edgars peldas ezerā, kuram ir riņķa forma. Esot pašā ezera vidū, viņš pamana krastā kaimiņu Vofku, kurš viņu skolā vienmēr sit un atņem pusdienu naudu. Tā kā Vofka ir tikko paēdis, viņš nevar peldēt un tāpēc cer noķert Edgaru krastā. Zināms, ka Vofka skrien x reizes ātrāk nekā Edgars peld, bet, būdams skolas skvoša čempions, Edgars var viegli aizmukt no Vofkas, esot uz sauszemes. Vai Edgaram izdosies tikt mājās sveikam un veselam, ja x=3 ? Kāda ir atbilde gadījumā x=4 ? Riņķa līnijas garumu aprēķina pēc formulas $c = 2\pi r$, kur r –riņķa rādiuss un skaitļa π aptuvenā vērtība ir 3,14.

15. Aruns un Ašouks ir istabas biedri kopmītnēs. Viņi ir sarunājuši, ka istabā viena siena (visām sienām ir taisnstūra forma) tiks atvēlēta plakātiem. Aruns abonē avīzi "Mama" (iznāk piektdienās), bet Ašouks - "Lama" (šī iznāk sestdienās). Katrā avīzē ir viens plakāts A3 formātā, ko katrs no puišiem uzlīmē uz sienas brīvā vietā (t.i. nepārklājoties ar jau esošajiem plakātiem). Kad viņi ievācās istabā pirmdien, siena bija tukša. Vai Aruns var panākt, ka "Mama" plakāti ir vairākumā, kad uz sienas vairs nav brīvas vietas jauniem plakātiem?

Uzdevumu lapa 9.klasēm

RV1.Ģ komandu olimpiāde matemātikā pamatskolai

Svaigā Maize 2004

1. 30 skolēni rakstīja diktātu. Aleksim diktātā bija 14 kļūdas. Citiem skolēniem bija mazāk. Pierādīt, ka klasē var atrast trīs skolēnus, kuri pieļāva vienādu kļūdu skaitu.

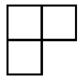
2. Karaļvalstī ir 8 pilsētas. Karaliene grib uzbūvēt tādu ceļu sistēmu, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, iebraucot ne vairāk kā vienā citā pilsētā, un no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļu. Pie kāda mazākā k tas iespējams?

3. Dots: $a + b = 1$. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

4. Dots ΔABC. Punkti M, N un K pieder attiecīgi malām BC, CA un AB. Nogriežņi AM, BN un CK krustojas vienā punktā O. Pierādīt:

$$AM + BN + CK > \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

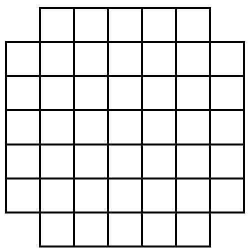
5. Riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos M un K. Caur M novilkta pieskare riņķa līnijai ω_1, kuras centrs ir O. Pieskare krusto ω_2 arī punktā N, turklāt MK = NK. NK krusto ω_1 punktos K un L. Noteikt $\angle MOK$, ja $\angle MKL = \alpha$

6. Dots kvadrāts, kas sastāv no n x n kvadrātiskām rūtiņām un kuram stūru rūtiņas izgrieztas (attēlā piemērs, ja n=7). Vai to var sadalīt šādās figūrās: , ja

a) n = 7;

b) n = 8;

c) n = 9 ?



7. Ar k apzīmēsim naturālu skaitli, kas lielāks par 1. Virknes pirmais loceklis ir $a_1=k-1$.

$a_n=a_{n-1}+k^{a_{n-1}}$. Pierādīt, ka neviens virknes loceklis nedalās ar k.

8. Vai kvadrātā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 36 katru vienu reizi tā, lai katrā kolonnā un rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar

a) 9 ;

b) 27 ?

9. Noteikt visas a, b un c vērtības, ar kurām vienlaicīgi ir pareizas vienādības

$$a = 1 + \frac{1}{b} \qquad b = 1 + \frac{1}{c} \qquad c = 1 + \frac{1}{a}$$

10. a, b, c, d - četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ dalās ar 4.

11. Noteikt visus reālu skaitļu pārus (a;b), kuriem izpildās vienādība

$$a^2 + b^2 = \frac{5ab}{2}$$

12. Dota lapa ar regulāru trijstūri, lineāls bez atzīmēm, cirkulis un zīmulis. Konstruēt regulāru sešstūri (aprakstīt risinājuma gaitu).

Piezīme: daudzstūri sauc par regulāru, ja visas tā malas ir vienādas un visi leņķi vienlieli.

13. Dotas 7 bumbiņas - 2 no tām ir citādā svarā nekā pārējās 5. Doti sviru svari bez atsvariem. Vai ar 5 svēršanām var atrast 2 citādās bumbiņas?

14. Skaitļu pāri sauc par *spēcīgu*, ja šo skaitļu kvadrātu starpība ir vienāda ar kāda skaitļa kubu, bet šo skaitļu kubu starpība - ar kāda skaitļa kvadrātu.

a) atrast kaut vienu *spēcīgu* skaitļu pāri;

b) pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *spēcīgi* skaitļu pāri.

15. Apskatām visus veselos un pozitīvos skaitļus, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3; 4 un 5. Sakārtosim tos augošā secībā un ar n apzīmējam skaitli, kas šajā sarakstā atrodas 2004-ajā vietā.

a) cik ciparu ir skaitlim n ?

b) atrast skaitli n.

Komandu olimpiāde „Dzidrais Vilnis 2005”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Plaknē atzīmēts 21 punkts. Novilktas 10 taisnes tā, ka katrs no atzīmētajiem punktiem pieder kādai no tām. Pierādīt, ka var izvēlēties 3 no dotajiem punktiem tā, ka tie atrodas uz 1 taisnes.

2. Pierādīt, ka 5 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 120.

3. Lapsēns un Kazlēns iegāja matemātikas klasē. Uz tāfeles bija uzrakstīti divi pozitīvi skaitļi. Naskais Kazlēns aprēķināja šo skaitļu vidējo aritmētisko un paziņoja rezultātu. Lapsēns sareizināja abus skaitļus un izvilka kvadrātsakni un apgalvoja, ka viņa iegūtais rezultāts ir lielāks. Pierādīt, ka Lapsēns kārtējo reizi melo!

4. Dots, ka $a > b$ un $x > y$. Pierādīt, ka $ax + by > ay + bx$.

5. Slimniekam tika izrakstītas divu veidu tabletes. Tās viņam jādzer ik pēc noteikta laika sprīža pa vienai tabletei no katra veida. Jebkura cita kombinācija ir bīstama veselībai un dzīvībai. Kad bija atlikušas 4 tabletes (pa 2 no katra veida), viņš tās nejauši sabēra kopā, un nu tās vairs nevar atšķirt. Vai viņš var pabeigt ārstēšanos, nepakļaujot veselību riskam?

6. No skaitļa 2005 atņem tā ciparu summu. No iegūtā skaitļa, savukārt, šī skaitļa ciparu summu. Tā turpina, līdz iegūst viencipara skaitli. Atrast šo skaitli!

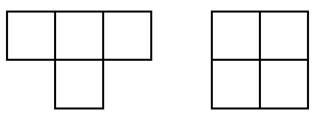
7. Doti divi koncentriski riņķi (tādi, kuru centri atrodas vienā punktā). Lielākajam novilkta horda, kas pieskaras mazākajam riņķim. Izteikt laukumu starp mazāko un lielāko riņķa līniju atkarībā no hordas garuma h. *(Riņķa laukumu aprēķina pēc formulas $L = \pi R^2$)*

8. Ūdenspolo turnīrā piedalījās k komandas. Vai iespējams, ka turnīra laikā bija tāds brīdis, kad katra komanda bija izspēlējusi tieši 3 spēles.

a) Ja $k = 6$

b) Ja $k = 7$

9. Vai 8x8 rūtiņu kvadrātu var sagriezt septiņās figūrās „T” un deviņās figūrās „O” ?

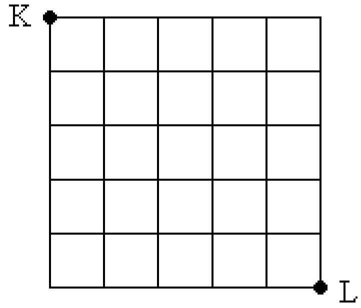


Figūra "T"   Figūra "O"

10. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2005. Kādu skaitļu ir vairāk – pāra skaitļu ar nepāra ciparu summu vai nepāra skaitļu ar pāra ciparu summu?

11. Mežā dzīvo 24 aļņi. Daži no viņiem vienmēr melo, pārējie vienmēr saka patiesību. Aļņi stāv pa apli tā, ka meļiem blakus stāv tikai vecāki aļņi. Katram no aļņiem uzdeva divus jautājumus. Vai tu esi vecāks par alni pa labi no tevis? Vai tu esi vecāks par alni pa kreisi no tevis? (Nav divu aļņu, kas būtu vienādi veci.) Uz pirmo jautājumu kopā tika saņemtas 9 apstiprinošas atbildes, bet uz otro jautājumu 17 apstiprinošas atbildes. Cik no aļņiem ir meļi?

12. Dota pilsētas ielu karte. Cik dažādos veidos Vilnis var nokļūt no punkta K līdz punktam L, ja drīkst pārvietoties tikai virzienā uz leju un virzienā pa labi? Atrast visus iespējamos Viļņa maršruta garumus, ja attālums starp diviem blakus krustojumiem ir 50 metri!



13. Skaitļu virknē katrs nākamais skaitlis ir divu iepriekšējo skaitļu summa. Pirmie divi skaitļi ir vieninieki (1; 1; 2; 3; 5...). Pierādīt apgalvojumu: ja virknē kāds skaitlis dalās ar k, tad virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kuri dalās ar k.

14. Orbitrekam ir 10 pēc ārējā izskata vienādi āboli. Divi no tiem ir tārpaini. Orbitreks ir izgudrojis tārpu detektoru, kurā ieliekot dažus ābolus (varbūt vienu), var noteikt, vai to skaitā ir kāds tārpains ābols. Diemžēl ar šo detektoru var veikt tikai 6 pārbaudes. Vai Orbitreks var atrast tārpainos ābolus?

15. Dotas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kuru rādiusi ir attiecīgi x un y. Tās krustojas punktos A un D. Riņķa līnijai ω_1 caur A novilkta pieskare, kas krusto ω_2 arī punktā C. Savukārt riņķa līnijai ω_2 caur A novilkta pieskare, kas krusto ω_1 arī punktā B. Izrādās, ka taisne BC iet caur punktu D. Atrast proporciju $\frac{BD}{DC}$!

2008. gada komandu olimpiāde

Citu variantu nav

Uzdevumi 8. klasei.

1) Bagātajam Ričam garāžā ir trīs marku automašīnas – Audi, Honda, Toyota. Hondu skaits garāžā ir ne vairāk kā $\frac{2}{5}$ no Audi skaita, taču vismaz divreiz lielāks nekā Toyotu skaits. Pierādiet, ka Ričs tiešām ir bagāts (t.i., ka viņam garāžā stāv vismaz 8 automašīnas)!

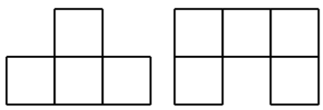
2) Dota skaitļu virkne 1; 2; 3; 4 ... 6^n. Cik šajā virknē ir skaitļu, kas dalās ar 2^n?

3) Handbola turnīrā piedalās 9 komandas. Katra komanda ir izspēlējusi tieši 7 spēles. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par zaudējumu 0 punktu, neizšķirtu nav. Pierādīt, ka var atrast divas komandas ar vienādu punktu skaitu!

4) Gallijas iedzīvotājiem patīk iesaistīties biedrībās. Katrs iedzīvotājs ir iesaistījies tieši 3 biedrībās. Turklāt katrā biedrībā ir tieši 4 biedri. Pierādīt, ka Gallijas iedzīvotājus var sadalīt četrās skaita ziņā vienādās daļās.

5) Dots, ka a ir pozitīvs skaitlis, bet n naturāls.
Pierādīt $a^n + a^{n-1} + a^{n-2} \ldots + a^{1-n} + a^{-n} \geq 2n+1$.

6) Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem a)6 x 12; b) 10 x 12?
(Figūras drīkst rotēt, taču tās nedrīkst pārklāties)



7) Vai dotā taisnstūra rūtiņas var aizpildīt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru skaitli izmantojot tieši vienu reizi) tā, ka gan katras kolonnas, gan katras rindas skaitļu summa dalās ar 13?

8) Ābolu kaudzē sākotnēji bija 23 āboli. Ilze katru dienu no ābolu kaudzes apēda 4 ābolus, bet Harijs 3 ābolus. Savukārt vecmāmiņa katru dienu no rīta kaudzei pielika klāt tieši tikpat ābolu, cik bija palicis pāri iepriekšējās dienas beigās. Jānītis gribēja būt taisnīgs un apgalvoja, ka ābolus ēdīs tikai tad, kad ābolu kaudzi varēs sadalīt 3 vienādās daļās. Vai Jānītis jebkad tiks pie ābolu ēšanas?

9) Dots trijstūris ABC, uz malas BC atlikts punkts D. Punkti M, K un L ir attiecīgi nogriežņu AB, AD un AC viduspunkti. Pierādīt, ka M, K un L atrodas uz vienas taisnes.

10) Leldei tika aizsietas acis, un viņa tika nosēdināta pie galda, uz kura atradās ļoti liels daudzums viena lata monētu. Tieši 128 no tām bija pagrieztas ar ciparu uz augšu, pārējās – ar ģerboni uz augšu. Pēc taustes visas monētas šķiet vienādas. Kā Leldei rīkoties, lai sadalītu monētas divās daļās tā, lai katrā no daļām būtu vienāds daudzums monētu ar ciparu uz augšu.

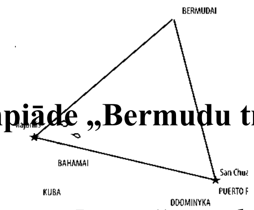
11) Orbitreks Mārtiņdienā izlasīja m grāmatas. Sākot ar nākamo dienu, viņš katru dienu izlasa par m grāmatām vairāk nekā iepriekšējā dienā. Ar kādām m vērtībām pienāks diena, kuras beigās Orbitreka kopējais izlasīto grāmatu skaits ir 2006?

12) Ījans brokastīs vēlas uzvārīt „septiņu minūšu" olu. Viņam ir divi smilšu pulksteņi, ar kuriem ir iespējams izmērīt attiecīgi 5 un 11 minūšu intervālu. Lai ola būtu garšīga, tā jāvāra tieši septiņas minūtes bez pārtraukuma. Vai Ījans var tikt pie kārotās olas? Ja jā, tad kā?

13) Uz rūtiņa lapas uzzīmēts šaha galdiņš. Vai Rūdim ir iespējams sagriezt (griežot tikai pa rūtiņu malām) šo šaha galdiņu tā, ka katra figūra sastāv no divreiz vairāk vienas krāsas laukumiņiem nekā otras krāsas laukumiņiem?

14) Gabriēls izsita logu un brīnumainā kārtā atklāja, ka visas stikla lauskas ir trijstūra formā, turklāt lausku stūri veidoja tikai tādus leņķus, kas dalās ar 30 grādiem. Sīkāk papētot, viņš ievēroja, ka katras lauskas īsākā mala ir tieši 5 cm gara. Tagad Gabriēls vēlas atrast četras dažādas stikla lauskas. Vai viņam tas izdosies?

15) Dotas 8 pēc izskata vienādas monētas un sviras svari bez atsvariem. 5 no tām ir izgatavotas no sudraba, bet pārējās 3 - no alumīnija (tātad tās ir nedaudz vieglākas par sudraba monētām). Vai ar 4 svēršanām ir iespējams atrast visas alumīnija monētas?



Komandu olimpiāde „Bermudu trijstūris”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Konkursā „Šovs ar zvaigzni” piedalās 11 dalībnieki. 3 tiesneši vērtē dalībnieku uzstāšanos ballu sistēmā no 1 līdz 10. Pirmais tiesnesis ir sev atvieglojis vērtēšanas procesu un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar nepāra ballēm (1;3,5,7,9). Tāpat vērtēšanu atvieglo otrais tiesnesis un vērtē dalībnieku uzstāšanos tikai ar pāra ballēm (2,4,6,8,10). Vienīgi trešais tiesnesis paliek uzticīgs dotajai sistēmai un vērtē dalībniekus ar ballēm no 1 līdz 10. Pēc pirmās uzstāšanās izrādījās, ka visiem dalībniekiem ir atšķirīgi vērtējumi. Pierādīt, ka vismaz diviem dalībniekiem vērtējumi dalās 3.

2. Orbitreku ciemā ir 20 ciltis, kuras pielūdz dievības. Katru dievību pielūdz tieši 3 ciltis. Orbitreki uzskata, ka brīdi, kad kāda cilts pielūdz tieši 7 dievības, tā atrodas *balansā.* Viedākie Orbitreki ir pierādījuši, ka brīdi, kad visas ciltis būs *balansā*, tad pienāks Pasaules gals. Vai Pasaules gals var pienākt?

3. Dotas 9 pēc ārēja izskata vienādās monētās n sviru svari bez atsvariem. 2 no tām ir izgatavotas no vieglāka materiāla. Vai ar 4 svēršanas reizēm ir iespējams atrast visas vieglākās monētas?

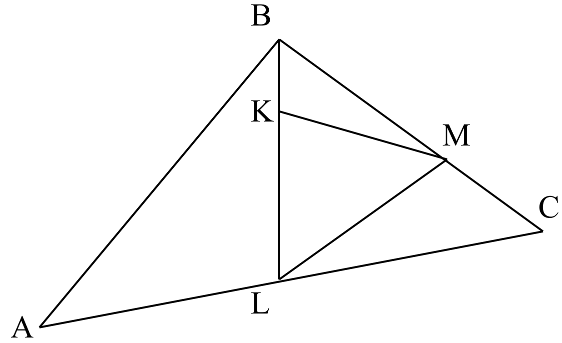
4. Uz trijstūra ABC malām AB, BC un AC atzīmēti attiecīgi punkti C_1, A_1 un B_1 tā, ka $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Pierādīt, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ augstumu krustpunkts atrodas uz leņķa A bisektrises.

5. Dots, ka x un y ir nenegatīvi skaitļi, kuru summa nepārsniedz 1. Pierādīt, ka $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$.

6. No pirmajiem 80 naturālajiem skaitļiem izvēlējās 20 pāra skaitļus un 20 nepāra skaitļus. Izvēlēto pāra skaitļu summa ir vienāda ar izvēlēto nepāra skaitļu summu. Pierādīt, ka starp izvēlētajiem skaitļiem ir divi tādi, kuru summa ir 81.

7. Skolotājam Gabrielam bija aizdomas, ka viņa stundā daži skolēni guļ. Slepus pirms stundas viņš klases visos 6 stūros (klasei ir tāda regulāra sešstūra forma, kura malas garums ir a) uzstādīja krācējmetrus. Katrs krācējmetrs fiksē to telpas iekšpusē guļošo skaitu, kuri no tā atrodas attālumā, kas nepārsniedz a. Pēc stundas izrādījās, ka visi krācējmetri kopā fiksējuši 7 guļošos.
Cik skolēnu gulēja stundā? (*Par regulāru sešstūri sauc sešstūri, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.)*

8. Trijstūra ABC leņķi sakrīt ar ΔLMC leņķiem, savukārt ΔLMC leņķi sakrīt ar ΔLMK leņķiem un ΔLMK leņķi sakrīt ar ΔKMB leņķiem. Noteikt leņķa B lielumu.



9. Katrā kvadrāta *ABCD* virsotnē ieskrūvēta spuldzīte. Katrā kvadrāta malā ir slēdzis, kuru nospiežot, tās spuldzītes, kas atrodas attiecīgās, malas galos maina savu stāvokli: ja spuldzīte(-s) ir ieslēgta(-s), tā(-s) izslēdzas, bet, ja izslēgta(-s), tad ieslēdzas. Katrai spuldzītei ir īpašība: to ieslēdzot pirmo reizi, tā ir sarkana, ieslēdzot otro reizi- dzeltena, trešo reizi- sarkana, ceturto reizi- dzeltena u.t.t. Sākumā spuldzītes *A* un *C* ir sarkanas, bet *B* un *D* vēl ne reizi nav ieslēgtas. Vai, vairākas reizes nospiežot slēdžus, var panākt, ka visas spuldzītes ir ieslēgtas vienā krāsā?

10. Dotas trīs vienādības

$$a^2 + b^2 = \frac{25ab}{12}$$

$$a^2 + c^2 = \frac{13ac}{6}$$

$$b^2 + c^2 = \frac{5bc}{2}$$

Atrast tādu skaitļu a,b,c trijnieku, ka visas trīs vienādības izpildās. Pierādīt, ka tādu trijnieku ir bezgalīgi daudz.

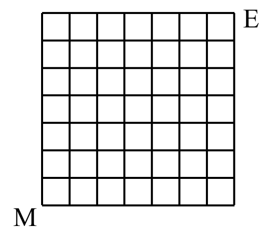
11. Divi riteņbraucēji sāk braukt no viena punkta. Pirmais no tiem dodas dienvidu virzienā, ciemoties pie vecmāmiņas. Kad riteņbraucējs nobraucis 1 km tas apstājas, lai atpūstos, tad nobrauc vēl 3 km un atkal apstājas. Tā viņš turpina, katru reizi līdz nākamajai apstāšanās reizei nobraucot par 2 km vairāk nekā līdz iepriekšējai apstāšanās reizei. Nonācis galā pie vecmāmiņas viņš konstatē, ka bija apstājies n reizes. Otrais pie savas vecmāmiņas riteņbraucējs brauc tieši tādā pašā manierē kā pirmais braucējs, ceļā līdz vecmāmiņai veicot n apstāšanās. Tikai, atšķirība no pirmā, braukšanu viņš uzsāk pretējā virzienā (ziemeļu virzienā) un līdz pirmajai apstāšanās reizei nobrauc 2 km, nevis 1 km. Pierādīt, ka attālums starp abu riteņbraucēju vecmāmiņām dalās ar 2n+3.

12. Šaha galdiņa katrā rūtiņā jāieraksta kāds no skaitļiem -1; 0; 1. Vai skaitļus var ierakstīt, tā, ka katrā 2x2 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 0, bet katrā 3x3 kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būtu 1?

13. Turnīrā piedalās 10 komandas. Katra komanda ar katru izspēlē tieši n reizes. Neizšķirts nav iespējams. Katrai komanda tiek piešķirts *indekss*, kas norāda, cik gara ir bijusi komandas pēdējo uzvarēto vai zaudēto spēļu sērija. Ja komanda pēdējās, piemēram, 5 spēles ir uzvarējusi, tad *indekss* ir 5. Savukārt, ja komanda pēdējās, piemēram, 7 spēles ir zaudējusi, tad *indekss* ir -7. Kāda ir maksimālā iespējamā visu komandu *indeksu* summa?

14. Dots n x n rūtiņu tīkls ar rūtiņu malu garumu 1 metrs. Spēlētāji Mārtiņš un Edgars pamīšus pārvieto savus kauliņus pa rūtiņu virsotnēm. Turklāt kauliņus gājienā drīkst pārvietot tieši par 1 metru un tikai uz virsotnēm, uz kurām iepriekš nav bijis neviens cits kauliņš. Mārtiņš spēli uzsāk no virsotnes M, bet Edgars no virsotnes E. Spēlētājs, kurš vairs nespēj izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot, ja

a) n=7
b) n=6



15. Dots, ka a ir reāls skaitlis. Pierādīt

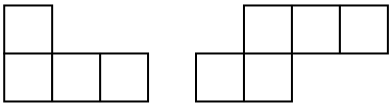
$$1+a^2+a^4+...+a^{2\cdot 2007} \geq 2(a+a^5+a^9+...+a^{2\cdot 2007-1}).$$

Komandu olimpiāde „Asie Cipari” 

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Vai no dotajām figūrām var salikt taisnstūri ar izmēriem 7x7? (Figūras drīkst būt apgrieztas otrādi un pagrieztas, taču tās nedrīkst pārklāties.)



2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

3. Kubu sagrieza 1000 vienādos mazākos kubiņos. Cik reižu mazo kubiņu kopējais virsmas laukums ir lielāks par lielā kuba virsmas laukumu?

4. Futbola čempionātā piedalās 8 komandas. Pirmajās 10 spēļu kārtās 17 spēles beidzās ar neizšķirtu rezultātu. Anatolijs ir pierādījis, ja 11. izspēles kārtā savā starpā spēlēs 2 komandas, kurām kopējais nospēlēto neizšķirtu skaits ir lielāks par 8, tad to spēle arī beigsies ar neizšķirtu. Pierādiet, ka 11. spēļu kārtā vismaz viena spēle beigsies ar neizšķirtu!

5. Doti 5 naturāli skaitļi. Nekādu divu starpība nedalās ar 5. Pierādīt, ka viens no skaitļiem dalās ar 5.

6. Dots 8x8x8 kubs, kas sastāv no 512 mazākiem 1x1x1 kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā 2x2x2 kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?

7. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādīt

a) $2^8+3\cdot2^7+3^2\cdot2^6+3^3\cdot2^5+3^4\cdot2^4+3^5\cdot2^3+3^6\cdot2^2+3^7\cdot2^1+3^8=3^9-2^9$

b) $2^k+3\cdot2^{k-1}+3^2\cdot2^{k-2}+\ldots+3^{k-1}\cdot2+3^k=3^{k+1}-2^{k+1}$

8. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērto Zaļo podu?

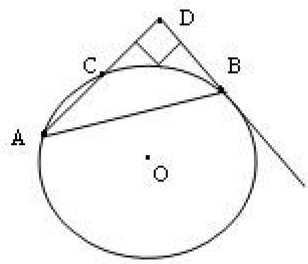
9. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

10. Pierādīt, ka $\frac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2)$, ja $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

11. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise!



12. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

13. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

14. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?

15. Pilī dzīvo k orbitreki (k>3). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam k+6 zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķīra vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādīt, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{K} = \{2009\}$$

Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 10 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 9. klasei

1. Sadalīt reizinātājos $4a^4 + b^4$.

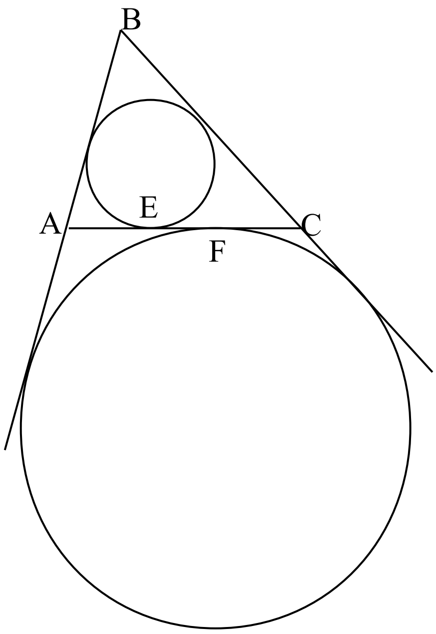
2. Kvadrāta ABCD iekšpusē ņemts tāds punkts P, ka ΔBPC ir vienādmalu trijstūris. Aprēķināt $\angle$ APD.

3. Pie kādām naturālu skaitļu a, b, c, d vērtībām ir spēkā vienādība a + b + c + d= abcd?

4. Banka izkala 6 jubilejas monētas. Divas no monētām izrādījās brāķa – tās bija par 0,01 gramu vieglākas nekā parējās 4 monētās, kurām bija vienāds svars. Monetārā specvienība iegādājās smalkus sviru svarus, bet ar tiem dienas laikā var veikt tikai 3 svērienus, nezaudējot precizitāti. Vai monetārajai specvienībai ir iespējams dienas laikā atrast 4 pareizās monētas un laist tās apgrozībā?

5. Dots, ka k, l, m, n ir naturāli skaitļi. Vai vienlaicīgi var izpildīties 3 vienādības $k + l = 20$, $m + n = 6$, $km + ln = 89$?

6. Dots, ka AB, BC, AC abu riņķa līniju kopīgās pieskares, E un F pieskaršanās punkti. Pierādīt, ka AE = FC.



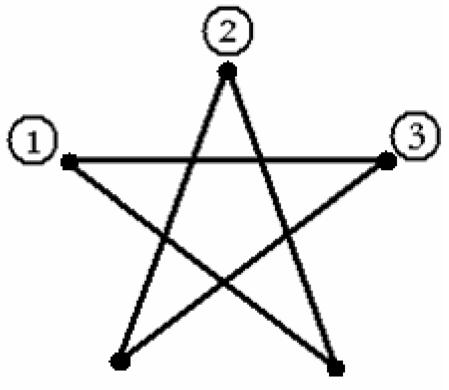
7. 5x6 rūtiņu laukuma stūrī novietots šaha zirdziņš. Šaha zirdziņš drīkst pārvietoties divas rūtiņas jebkurā virzienā un pēc tam vienu rūtiņu pa labi vai kreisi no sākotnējā kustības virziena. Vai ar zirdziņu var apstaigāt doto laukumu tā, lai katrā rūtiņā zirdziņš nostātos tieši vienu reizi? Vai to ir iespējams izdarīt pie nosacījuma, ja iepriekšējā gājienā zirdziņš ir sācis gājienu ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ, tad nākamajā gājienā tas sāk gājienu ar divām rūtiņām pa labi/kreisi, un otrādi, ja iepriekšējais gājiens ir sācies ar divām rūtiņām pa labi/kreisi, tad nākamajam gājienam jāsākas ar divām rūtiņām uz priekšu/atpakaļ?

8. Pierādīt, ka skaitlim $(2009!)^{2008}$ ir nepāra skaits dalītāju. Ar n! apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n.

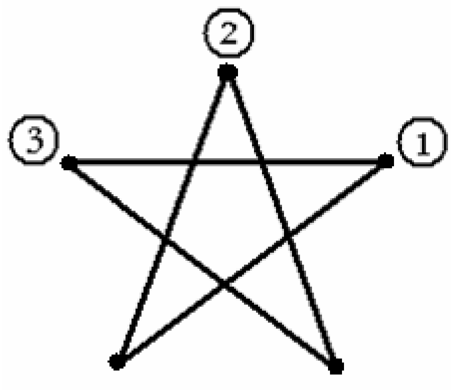
9. Uz Orbitreku planētas visi Orbitreki, kas kaut vienu reizi ir paspieduši roku kādam citam Orbitrekam, dzīvo mūžīgi. Vai no visiem Orbitrekiem tādi, kas izdarījuši nepāra skaita rokas spiedienu, ir pāra vai nepāra skaits?

10. Pieņemsim, ka a un d ir doti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka a+dn nevar būt pirmskaitlis visām naturālām n vērtībām.

11. Ar katru gājienu vienu žetonu (attēlos tie numurēti ar cipariem 1,2,3) drīkst pārvietot uz brīvu pretējo virsotni. Vai ar šādiem gājieniem iespējams pārveidot 1. attēlu par 2.?



1. attēls



2. attēls

12. Mazais Edgars peldas ezerā, kuram ir riņķa forma. Esot pašā ezera vidū, viņš pamana krastā kaimiņu Vofku, kurš viņu skolā vienmēr sit un atņem pusdienu naudu. Tā kā Vofka ir tikko paēdis, viņš nevar peldēt un tāpēc cer noķert Edgaru krastā. Zināms, ka Vofka skrien x reizes ātrāk nekā Edgars peld, bet, būdams skolas skvoša čempions, Edgars var viegli aizmukt no Vofkas, esot uz sauszemes. Vai Edgaram izdosies tikt mājās sveikam un veselam, ja x = 3 ? Kāda ir atbilde gadījumā x = 4 ? Riņķa līnijas garumu aprēķina pēc formulas $c = 2\pi r$, kur r –riņķa rādiuss un skaitļa π aptuvenā vērtība ir 3,14.

13. Vai izliektu septiņstūri, kuram visas malas ir vienādas, iespējams sagriezt galīgā skaitā paralelogramu?

14. Klasē ir 35 skolēni. Viņi vēlas izlozēt 11 cilvēku futbola komandu, no kuriem viens ir kapteinis. Tika nolemts vispirms izlozēt komandas dalībniekus, un tad no tiem kapteini. Taču Renārs uzstāja, ka vispirms jāizlozē kapteinis, un tad pārējā komanda. Vai šī pieeja palielina Renāra izredzes kļūt par kapteini?

15. Aruns un Ašouks ir istabas biedri kopmītnēs. Viņi ir sarunājuši, ka istabā viena siena (visām sienām ir taisnstūra forma) tiks atvēlēta plakātiem. Aruns abonē avīzi "Mama" (iznāk piektdienās), bet Ašouks - "Lama" (šī iznāk sestdienās). Katrā avīzē ir viens plakāts A3 formātā, ko katrs no puišiem uzlīmē uz sienas brīvā vietā (t.i. nepārklājoties ar jau esošajiem plakātiem). Kad viņi ievācās istabā pirmdien, siena bija tukša. Vai Aruns var panākt, ka "Mama" plakāti ir vairākumā, kad uz sienas vairs nav brīvas vietas jauniem plakātiem?

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”

Katru uzdevumu vērtē ar 0 ÷ 5 punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 10. klasei

1. Par maģisku kvadrātu sauc tādu 4x4 rūtiņu kvadrātu, kurā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 16 (katrs skaitlis tieši vienu reizi) tā, ka katrā rindiņā, kolonnā un abās garākajās diagonālēs skaitļu summas ir vienādas. Atrodiet kaut vienu maģisko kvadrātu!

2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?

3. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērto Zaļo podu?

4. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltās bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?

5. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3.lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt

a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.

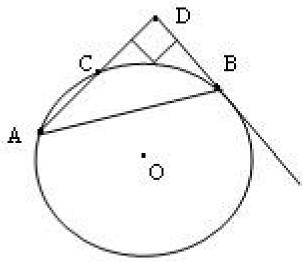
b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?

6. Pierādīt, ka $\dfrac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2)$, ja $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$.

7. Vēstures skolotājai jāsadala vēstures eksāmena dalībnieki vismaz 3 vienlīdz lielās grupās. Sadalot dalībniekus 3 vienādās grupās, 2 dalībnieki palika nekur neiekļauti, 4 grupās 2 dalībnieki palika pāri, 5 grupās 4 dalībnieki. Cik grupās galu galā skolotājai būtu jāsadala eksaminējamie skolēni, lai visi skolēni tiktu iekļauti un visas grupas būtu vienādās, ja zināms, ka eksāmenā nepiedalās vairāk par 73 skolēniem?

8. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti elektroniskie svari, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svars ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

9. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise.



10. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādīt:

a) $2^8+3\cdot 2^7+3^2\cdot 2^6+3^3\cdot 2^5+3^4\cdot 2^4+3^5\cdot 2^3+3^6\cdot 2^2+3^7\cdot 2^1+3^8=3^9-2^9$

b) $6^k+3\cdot 6^{k-1}+3^3\cdot 6^{k-2}+\ldots+3^{2k-5}\cdot 6^2+3^{2k-3}\cdot 6+3^{2k-1}=3^{2k}$

11. Uz tāfeles uzrakstīti n naturāli skaitļi. Katru divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir l, bet mazākais kopīgais dalāmais m. Pierādīt, ka visu doto skaitļu reizinājums ir vienāds ar $m\cdot l^{n-1}$.

12. Dots 8x8x8 kubs, kas sastāv no 512 mazākiem 1x1x1 kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā 2x2x2 kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?

13. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?

14. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir uzgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?

15. Pilī dzīvo k orbitreki (k>3). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam k+6 zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķīra vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādīt, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.